INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES
STATISTICIENS ECONOMISTES
A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

SESSION 1988 - Option MATHEMATIQUES

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTATIONS

. Pour tous x,y vecteurs de $\mathbb{R}^N$ on note :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i \text{ et } |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

. Pour tout entier $k \geq 1$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De même $\mathcal{C}\left([0,1],\mathbb{R}^N\right)$ désigne l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^N$. Si U est une application différentiable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, on notera U'(x) sa différentielle au point x. Quand N=1 on identifiera U'(x) au vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont la ième composante vaut $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$.

. Pour toute application linéaire A de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ on note :

$$|A| = \text{Sup}(|A(x)|, |x|=1)$$

. On rappelle qu'un ensemble Y est dit partout dense dans Z (où Y et Z sont deux sous-ensembles d'un espace métrique (X,d)) si et seulement si l'adhérence de Y contient Z.

. $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls.

. On dira qu'une application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ si elle est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ et si f' admet une limite à droite en 0.

. Enfin si x_0 appartient à un espace métrique (X,d), $B(x_0,r)$ désignera la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

I. PRELIMINAIRES

1° Soit (X,d) un espace métrique et U une application définie sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que U est semi-continue inférieurement si et seulement si : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X,\ U(x) \leq \alpha\}$ est fermé.

Tournez la page S. V. P.

a - Montrer que si U est semi-continue inférieurement et X est compact, alors U a un minimum sur X.

b - Montrer que cette conclusion s'applique aussi quand $X = \mathbb{R}^N$, U est semi-continue inférieurement et que $\lim_{\|x\| \to +\infty} U(x) = +\infty$.

c - Parmi les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, lesquelles sont semi-continues inférieurement ?

$$U_1(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$$

$$U_2(x) = x - U_1(x)$$

$$U_3(x) = 1 \quad \text{si } x \in \mathbb{Q}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

d - Montrer que la somme d'une fonction continue et d'une fonction semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement.

2° Soit O un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$ et F une application définie sur O à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On dit que F est différentiable au sens de Gâteaux en x, élément de O, si et seulement si :

$$\exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N),\ \forall h \in \mathbb{R}^N : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[F(x+th) - F(x)] = A(h)$$

a - Montrer que s'il existe, un tel A est unique. On note alors $A = F'_G(x)$.

On dira que F est différentiable au sens de Gâteaux sur O si elle l'est en tout point x de O.

b - Montrer que si F est différentiable au sens usuel sur O alors elle l'est aussi au sens de Gâteaux et : $\forall x \in O \quad F'(x) = F'_G(x)$.

c - On suppose que F est différentiable au sens de Gâteaux sur O. On prend x et y dans O et on suppose que l'application définie sur [0,1] qui à t associe $F'_G(tx + (1-t)y)(x-y)$ est continue. Montrer qu'alors :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \left\|F'_G(tx + (1-t)y)\right\| . \|x-y\|$$

d - Montrer que si F est continue, différentiable au sens de Gâteaux sur O et que F'_G est continue sur O, alors F est de classe C^1 sur O (on pourra utiliser 2° c-).

e - Montrer que la fonction définie par :

$$\begin{cases} F(x_1, x_2) = 1 & \text{si } x_1 = x_2^2 \text{ et } x_2 \neq 0 \\ F(x_1, x_2) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est différentiable au sens de Gâteaux en (0,0) mais qu'elle n'est pas continue.

II

Dans toute cette partie, (X,d) désigne un espace métrique complet et U une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et semi-continue inférieurement sur X. On se propose de montrer que si U est bornée inférieurement alors elle vérifie la propriété suivante, notée ($\mathcal{P}$) :

$$(\mathcal{P}) : \left(\forall x_0 \in X \quad \exists y \in X \,/\, \begin{cases} U(y) + d(x_0, y) \leq U(x_0) & (1) \\ \forall x \in X,\ x \neq y \Rightarrow U(x) + d(x,y) > U(y) & (2) \end{cases} \right)$$

1° Pour tout x de X on pose :

$$G(x) = \{y \in X \,/\, U(y) + d(x,y) \leq U(x)\}$$

a - Montrer que G(x) est un sous-ensemble fermé non vide de X.

b - Montrer l'équivalence : $y \in G(x) \Leftrightarrow G(y) \subset G(x)$ (3)

c - Montrer que ($\mathcal{P}$) équivaut à :

$$\forall x_0 \in X,\ \exists y \in G(x_0),\ G(y) = \{y\} \quad (4)$$

2° On veut démontrer ($\mathcal{P}$) par l'absurde. Pour cela on suppose que ($\mathcal{P}$) est fausse :

a - Montrer qu'alors on peut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant pour tout n :

$$\begin{cases} x_{n+1} \in G(x_n) \\ x_{n+1} \neq x_n \\ U(x_{n+1}) \leq \text{Inf}\{U(x), x \in G(x_n)\} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

b - Montrer que $(G(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-ensembles fermés de X.

c - Montrer que la suite des diamètres des $(G(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

d - Conclusion ?

3° On se donne $k > 0$, $\varepsilon > 0$ et x_ε élément de X tels que :

$$U(x_\varepsilon) \leq \text{Inf}\,\{U(x), x\in X\} + \varepsilon \qquad (5)$$

Montrer, grâce à (P), que l'on peut trouver y_ε dans X tel que :

$$\begin{cases} U(y_\varepsilon) \leq U(x_\varepsilon) & (6)\\ d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \dfrac{1}{k} & (7)\\ \forall\, x \in X,\ x \neq y_\varepsilon \Rightarrow U(x) > U(y_\varepsilon) - k\,\varepsilon\, d(x, y_\varepsilon) & (8)\end{cases}$$

4° En déduire que si $X = \mathbb{R}^N$ et si U est différentiable au sens de Gâteaux alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que :

$$\begin{cases} \lim_n U(y_n) = \text{Inf}\,\{U(x), x\in X\} & (9)\\ \lim_n U'_G(y_n) = 0 & (10)\end{cases}$$

III

On étudie dans cette partie quelques applications des résultats démontrés dans la Partie II.

1° Soit U une application définie, semi-continue inférieurement et différentiable au sens de Gâteaux sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose tout d'abord qu'il existe $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad U(x) \geq a|x| + c \qquad (11)$$

a - Soit p un élément quelconque de B(0,a) on pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad V(x) = U(x) - \langle p, x\rangle \qquad (12)$$

Montrer que V est bornée inférieurement.

b - En déduire que $U'_G(\mathbb{R}^N)$ est dense dans B(0,a).

c - On remplace (11) par l'hypothèse suivante : $\exists\, \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$(11') \quad \begin{cases} \lim_{t\to+\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ U(x) \geq \Phi(|x|)\end{cases}$$

Montrer que $U'_G(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathbb{R}^N$.

2° Soit F appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$; on suppose que la matrice de $F''(x)$ est inversible pour tout x et que la norme de son inverse est bornée supérieurement par une constante ℓ.

a - Montrer que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad |F''(x).F'(x)| \geq \frac{1}{\ell}|F'(x)| \qquad (13)$$

b - Montrer que si F' ne s'annule pas alors l'application $H(x) = |F'(x)|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Calculer sa dérivée.

c - Prouver (en utilisant II.4) qu'on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^N$ telle que que $H'(x_n)$ tend vers zéro.

d - En déduire que F' admet un zéro.

IV

Dans toute cette partie, on considère des applications U, V définies sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs réelles. Pour tous x, p dans $\mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$ on dit que p supporte U en x à ε près si :

$$\exists\, \eta > 0,\ \forall\, y \in B(x,\eta) \quad U(y) \geq U(x) + \langle p, y-x\rangle - \varepsilon\,|y-x| \qquad (14)$$

L'ensemble des p qui vérifie (14) est noté $S_\varepsilon U(x)$.

1° Propriétés de $S_\varepsilon U(x)$:

a - Montrer que si $S_\varepsilon U(x)$ est non vide pour tout x de $\mathbb{R}^N$, alors U est semi-continue inférieurement.

b - Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ S_\varepsilon U(x) + S_\alpha V(x) \subset S_{\varepsilon+\alpha}(U+V)(x)$$

Tournez la page S. V. P.

c - Montrer que si U est différentiable (au sens usuel) au point x, alors :

$$(U'(x)) = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} S_\varepsilon U(x)\right) \cap \left(\bigcap_{\varepsilon>0} - S_\varepsilon(-U)(x)\right)$$

2° On se propose de montrer que la propriété ci-dessous :

$$\left(\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad S_\varepsilon U(x) \neq \emptyset \text{ et } S_\varepsilon(-U)(x) \neq \emptyset\right) \qquad (15)$$

implique que U est différentiable au point x.

a - Montrer que si (15) est vérifié alors on peut trouver deux suites $(p_n),(q_n)$ de $\mathbb{R}^N$ et une suite décroissante (η_n) de nombres positifs vérifiant :

$$\forall\, y \in B(x,\eta_n) \begin{cases} U(y) \geqslant U(x) + (p_n, y-x) - \dfrac{\|x-y\|}{n} \\ U(y) \leqslant U(x) - (q_n, y-x) + \dfrac{\|x-y\|}{n} \end{cases}$$

b - En déduire que (p_n) et (q_n) sont des suites de Cauchy.

c - Conclure.

3° On se propose de montrer que pour toute fonction U bornée inférieurement et semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^N$, et pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points x où $S_\varepsilon U(x)$ est non vide est partout dense.

Pour cela on considère x_0 quelconque dans $\mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ quelconques,

et on va montrer : $\exists\, \bar{x} \in B(x_0,\eta),\ S_\varepsilon U(\bar{x}) \neq \emptyset$

a - On définit une fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$\begin{cases} f(t) = M & \text{si } t > 1 \\ f(t) = M(3t^2 - 2t^3) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \qquad (16)$$

où M est une constante positive donnée. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b - On pose alors, pour x dans $\mathbb{R}^N$,

$$F(x) = U(x) + f\left(\frac{\|x-x_0\|}{\eta}\right) \qquad (17)$$

Montrer, en utilisant les résultats de la Partie II, que l'on peut trouver $\bar{x}$ dans $\mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\begin{cases} F(\bar{x}) \leqslant \text{Inf}\,(F(x),\ x \in \mathbb{R}^N) + \varepsilon \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad F(x) \geqslant F(\bar{x}) - \dfrac{\varepsilon}{2}\|x-\bar{x}\| \end{cases}$$

c - Montrer que (U-F) est dérivable sur $\mathbb{R}^N$.

d - Montrer que $(U-F)'(\bar{x})$ appartient à $S_\varepsilon U(\bar{x})$.

e - Montrer que si $M > U(x_0) + \varepsilon - \text{Inf}\,(U(x), x \in \mathbb{R}^N)$ alors $\bar{x} \in B(x_0,\eta)$. Conclure.

* *

•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail